Линейные системы

© 2024 г. **Д.Н. ИБРАГИМОВ, канд. физ.-мат. наук (rikk.dan@gmail.ru)**
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

О ВНЕШНЕМ ОЦЕНИВАНИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ И 0-УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С СУММАРНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА СКАЛЯРНОЕ УПРАВЛЕНИЕ[1]

Рассматривается задача построения множеств достижимости и 0-управляемости для стационарных линейных дискретных систем с суммарным ограничением на скалярное управление. Для случая квадратичных ограничений и диагонализируемой матрицы системы данные множества построены явно в виде эллипсоидов. В общем случае предельные множества достижимости и 0-управляемости представлены в виде неподвижных точек сжимающего отображения в метрическом пространстве компактов. На основе метода простой итерации предложена сходящаяся процедура построения их внешних оценок с указанием априорной погрешности аппроксимации. Приведены примеры.

Ключевые слова: линейная дискретная система, предельное множество управляемости, предельное множество достижимости, расстояние Хаусдорфа, принцип сжимающих отображений.

DOI: 10.31857/S0005231024040018, **EDN:** ZHAHRC

1. Введение

При исследовании динамических систем зачастую приходится учитывать различные ограничения, наложенные на управляющие воздействия, что приводит к тому, что далеко не все терминальные состояния являются достижимыми из заданного начального даже за бесконечное время. В результате классических условий управляемости Калмана оказывается недостаточно, чтобы сделать вывод о достижимости того или иного терминального состояния. В связи с этим представляется актуальной разработка методов, позволяющих формировать конструктивное описание множеств достижимости, т.е. множеств терминальных состояний, в которые можно перевести систему из начала координат, и 0-управляемости, т.е. множеств начальных состояний, из которых систему можно перевести в начало координат, за конечное число шагов, а также оценки предельных множеств достижимости

[1] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00293).

и 0-управляемости [1]. Множества 0-управляемости и достижимости могут быть использованы в ряде задач оптимального управления для формирования позиционного управления для систем с дискретным временем [2, 3]. Таким образом, при помощи предельных множеств можно судить о разрешимости данных задач в принципе.

На данный момент активно развиваются методы оценивания множеств достижимости различных классов дискретных систем [4], гибридных систем [5], а также систем с различными видами неопределенностей [6]. Известны аналитические представления множеств достижимости и 0-управляемости для линейных систем с дискретным временем и ограничениями на функцию управления в смысле l_∞-нормы. В частности, доказано, что в случае линейных ограничений на управление множества достижимости и 0-управляемости за конечное число шагов представляют собой многогранники [2]. Для их предельных аналогов сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности [7–9]. При этом большая часть работ либо сфокусирована на исследовании только общих свойств предельных множеств достижимости и 0-управляемости [8–12], либо рассматривает системы с неограниченным управлением [10–14]. Только в ряде частных случаев предложены конструктивные методы формирования внешних оценок на основе аппарата опорных полупространств [15, 16] или принципа максимума [17].

Для систем с суммарными ограничениями на управление получено описание предельных множеств достижимости и 0-управляемости в виде многогранников для случая ограничений в смысле l_1-нормы [18]. При выборе l_p-нормы с произвольным значением параметра $p \in (1; +\infty)$ сформулированы и доказаны общие свойства предельных множеств достижимости и 0-управляемости [19]. В частности, доказано их представление в виде проекций суперэллипсоидальных множеств конечной [20, 21] и бесконечной размерностей, что тесно связано со строго выпуклым анализом [22, 23], выпуклым программированием [24], теорией нормированных пространств [25] и линейных операторов [26].

Зачастую в задачах управления требуется исследовать заданное начальное состояние на достижимость и управляемость, что сводится к проверке принадлежности фиксированной точки фазового пространства предельному множеству достижимости или 0-управляемости. Численно данная процедура может быть сведена к вычислению функционала Минковского, но известных результатов [19] недостаточно для его построения в явном виде. Более того, описание функционала Минковского образа выпуклого множества при линейном преобразовании в общем случае является нетривиальной задачей. По этой причине оказывается актуальной разработка методов, реализуемых программно, которые позволят вычислить точно функционал Минковского предельных множеств достижимости и 0-управляемости либо их внешних оценок сколь угодно высокого порядка точности.

В статье изучаются вопросы построения функционала Минковского множеств достижимости и 0-управляемости с суммарным ограничением на управление в смысле l_p-нормы в случае, когда они ограничены. Удается в явном виде описать искомую функцию при квадратичных ограничениях на управление и доказать, что исследуемые множества представляют собой эллипсоиды. Для случая произвольных нормированных пространств предельные множества достижимости и 0-управляемости описываются в качестве неподвижной точки сжимающего отображения в пространстве компактов, наделенного метрикой Хаусдорфа. Это позволяет предложить сходящийся итерационный процесс построения внешних оценок данных множеств с указанием априорной погрешности в явном виде. Для ряда значений параметров результирующие оценки имеют полиэдральную структуру, что делает возможным их применение в расчетах на ЭВМ.

Содержание статьи следующее. В разделе 2 производится постановка задачи. В разделе 3 обсуждаются вопросы вычисления функционала Минковского предельных множеств достижимости и 0-управляемости. Для частного случая l_2-ограничений на управление и диагонализируемой матрицы системы соответствующие множества строятся в явном виде. В разделе 4 описывается аппарат сжимающих отображений, используемый для построения предельных множеств достижимости и 0-управляемости. В разделе 5 предлагается метод формирования внешних оценок данных множеств произвольного порядка точности на основе метода простой итерации. В разделе 6 демонстрируется эффективность разработанного математического аппарата на различных примерах.

2. Постановка задачи

Рассматривается линейная система с дискретным временем и суммарным ограничением на скалярное управление:

$$\begin{aligned} &x(k+1) = Ax(k) + bu(k),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ &x(0) = x_0,\ \sum_{k=0}^{\infty} |u(k)|^p \leqslant 1, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $u(k) \in \mathbb{R}$ – скалярное управляющее воздействие, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ – матрицы системы, $p > 1$ – параметр, определяющий тип суммарного ограничения на управление.

Обозначим для произвольного $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ через $\mathcal{Y}_p(N)$ множество достижимости системы (1), т.е. множество тех состояний, в которые можно перевести систему (1) за N шагов из 0 посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{Y}_p(N) = \begin{cases} \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon x = \sum\limits_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1} bu(k),\ \sum\limits_{k=0}^{N-1} |u(k)|^p \leqslant 1\right\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Через $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ обозначим предельное множество достижимости системы (1), т.е. множество тех состояний, в которые систему (1) можно перевести за конечное число шагов посредством допустимого управления:

$$\mathcal{Y}_{p,\infty} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{Y}_p(N). \tag{3}$$

Обозначим для произвольного $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ через $\mathcal{X}_p(N)$ множество 0-управляемости системы (1), т.е. множество тех начальных состояний, из которых можно перевести систему (1) за N шагов в 0 посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{X}_p(N) = \tag{4}$$
$$= \begin{cases} \left\{x_0 \in \mathbb{R}^n \colon -A^N x_0 = \sum\limits_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1} b u(k), \ \sum\limits_{k=0}^{N-1} |u(k)|^p \leqslant 1\right\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases}$$

Через $\mathcal{X}_{p,\infty}$ обозначим предельное множество 0-управляемости системы (1), т.е. множество тех начальных состояний, из которых систему (1) можно перевести в 0 за конечное число шагов посредством допустимого управления:

$$\mathcal{X}_{p,\infty} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}_p(N). \tag{5}$$

Требуется разработать эффективный метод построения внешней оценки множеств (3) и (5) с любой наперед заданной точностью. В качестве критерия точности рассматривается расстояние Хаусдорфа ρ_H, а все множества предполагаются элементами полного метрического пространства $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$ [27]:

$$\mathbb{K}_n = \{\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \colon \mathcal{X} - \text{компакт}\},$$

$$\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \max\left\{\sup_{x\in\mathcal{X}} \inf_{y\in\mathcal{Y}} \|x-y\|_r ; \sup_{y\in\mathcal{Y}} \inf_{x\in\mathcal{X}} \|x-y\|_r\right\},$$

$$\|x\|_r = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^r\right)^{\frac{1}{r}}, & r \geqslant 1, \\ \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|, & r = \infty. \end{cases}$$

3. Вопросы точного описания предельных множеств достижимости и 0-управляемости

Обозначим через $\mathcal{E}_p(\infty)$ шар единичного радиуса с центром в 0 в нормированном пространстве l_p [25]:

$$\mathcal{E}_p(\infty) = \left\{u \in l_p \colon \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p \leqslant 1\right\}.$$

Также будем отождествлять последовательность $B = (b_1, b_2, \ldots) \in l_q^n$ с линейным оператором $B\colon l_p \to \mathbb{R}_r^n$, действующим по правилу

$$Bu = \sum_{k=1}^{\infty} u_k b_k.$$

Здесь предполагается, что числа p и q связаны соотношением $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, а пространство $\mathbb{R}_r^n$ является нормированным пространством $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_r)$. Отсюда с учетом теоремы Рисса [25] следует ограниченность оператора B, что позволяет рассматривать его как элемент нормированного пространства l_q^n с определенной на нем операторной нормой:

$$\|B\|_{l_q^n} = \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \|Bu\|_r.$$

Для простоты будем также отождествлять произвольную последовательность $y \in l_q$ с порожденным ею согласно теореме Рисса линейным и ограниченным функционалом $y\colon l_p \to \mathbb{R}$:

$$(y, u) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k u_k.$$

Существенными являются необходимые и достаточные условия ограниченности множеств (3) и (5), определяемые матрицами системы A и b. Жордановым базисом матрицы A называется набор линейно независимых векторов $h_1, \ldots, h_n \subset \mathbb{R}^n$, который задает преобразование подобия матрицы A к ее вещественной жордановой канонической форме [28, раздел 3.4 гл. 3]. Такой базис единственен с точностью до ненулевых сомножителей и порядка векторов $h_1, \ldots, h_n$, и каждый базисный вектор соответствует некоторой жордановой клетке, т.е. некоторому собственному значению матрицы A. Если разбить элементы жорданова базиса на три множества по критерию того, соответствуют ли они собственному значению матрицы A большему, равному или меньшему 1 по модулю, то получится определить следующие три инвариантных подпространства:

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_{<1} &= \mathrm{Lin}\{h_i\colon h_i \text{ соответствует собственному значению } \lambda,\ |\lambda| < 1\},\\
\mathbb{L}_{=1} &= \mathrm{Lin}\{h_i\colon h_i \text{ соответствует собственному значению } \lambda,\ |\lambda| = 1\},\\
\mathbb{L}_{>1} &= \mathrm{Lin}\{h_i\colon h_i \text{ соответствует собственному значению } \lambda,\ |\lambda| > 1\}.
\end{aligned}$$

В [19] продемонстрировано, что $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ и $\mathcal{X}_{p,\infty}$ ограничены тогда и только тогда, когда справедливы следующие условия соответственно:

$$Y_\infty = (b, Ab, A^2 b, \ldots) \in l_q^n \text{ или } b \in \mathbb{L}_{<1}, \tag{6}$$

$$X_\infty = (A^{-1} b, A^{-2} b, \ldots) \in l_q^n \text{ или } b \in \mathbb{L}_{>1}. \tag{7}$$

В этих случаях справедливы представления:

$$\overline{\mathcal{Y}}_{p,\infty} = Y_\infty \mathcal{E}_p(\infty) \in \mathbb{K}_n, \tag{8}$$

$$\overline{\mathcal{X}}_{p,\infty} = X_\infty \mathcal{E}_p(\infty) \in \mathbb{K}_n. \tag{9}$$

Согласно (8) и (9) предельные множества $\mathcal{Y}_{p,\infty}$, $\mathcal{X}_{p,\infty}$ представляют собой выпуклые множества, а следовательно, для их конструктивного описания посредством алгебраических неравенств может быть использован функционал Минковского [25, разд. 3, §2, гл. III]:

$$\mu(u,\mathcal{U}) = \inf\{t > 0\colon u \in t\mathcal{U}\}.$$

Продемонстрируем сложность вычисления функционала Минковского множеств (3) и (5) для произвольного значения параметра p, а также приведем частный случай, когда данное описание удается построить.

Лемма 1. Пусть $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$ – нормированные пространства, $\mathcal{U} \subset \mathbb{L}_1$ – выпуклое и ограниченное множество, $0 \in \operatorname{int}\mathcal{U}$, $B\colon \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_2$ – линейный, сюръективный и ограниченный оператор.

Тогда

$$\mu(x, B\mathcal{U}) = \inf_{u \in B^{-1}(\{x\})} \mu(u,\mathcal{U}).$$

Доказательство леммы 1 и всех последующих утверждений приведено в Приложении.

Получим следствия леммы 1, полагая $\mathbb{L}_1 = l_p$, $\mathbb{L}_2 = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} = \mathcal{E}_p(\infty)$. Выбор нормы в пространстве $\mathbb{R}^n$ несущественен, так как значение функционала Минковского не зависит от нормы, а в силу эквивалентности всех норм в конечномерном пространстве [25] оператор B будет ограничен для любой нормы в $\mathbb{R}^n$. Но для краткости обозначений будем полагать $\mathbb{R}^n$ евклидовым со скалярным произведением, определяемым соотношением

$$(x, y) = x^{\mathrm{T}} y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Введем нелинейный оператор $I_p(u)\colon l_p \to l_q$ по формуле

$$I_p(u) = \left(\operatorname{sign}(u_1)|u_1|^{p-1}, \operatorname{sign}(u_2)|u_2|^{p-1}, \ldots\right).$$

Обратным оператором к I_p является оператор I_q. Через $B^*\colon \mathbb{R}^n \to l_q$ обозначим оператор, сопряженный к B.

Лемма 2. Пусть $B \in l_q^n$ – сюръекция. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n$ верно, что

$$\mu(x, B\mathcal{E}_p(\infty)) = \|B^*\lambda\|_{l_q}^{q-1},$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию

$$BI_q(B^*\lambda) = x. \tag{10}$$

Согласно лемме 2 и представлениям (8) и (9) вычисление функционала Минковского для предельных множеств достижимости и управляемости может быть сведено к решению системы нелинейных уравнений вида (10) при выборе в качестве B операторов Y_∞ и X_∞ соответственно, что является нетривиальной задачей в общем случае. Хотя при значении параметров $p = q = 2$ решение системы можно получить в явном виде.

Следствие 1. Пусть $p = q = 2$, $B \in l_q^n$ – сюрьекция.

Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n$ верно, что

$$\mu(x, B\mathcal{E}_2(\infty)) = \sqrt{x^{\mathrm{T}}(BB^*)^{-1}x}.$$

Применение следствия 1 для построения $\mathcal{Y}_{2,\infty}$ и $\mathcal{X}_{2,\infty}$ определяется возможностью построить явно матрицу $BB^* \in \mathbb{R}^{n\times n}$, что согласно определению оператора B сводится к вычислению сходящегося ряда:

$$BB^* = \sum_{k=1}^{\infty} b_k b_k^{\mathrm{T}},$$

где B полагается равным Y_∞ или X_∞.

Лемма 3. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ обладает n линейно независимыми собственными векторами $h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{C}^n$, соответствующими собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $S = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Использованы следующие обозначения:

$$H = S \begin{pmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \ldots & \beta_{nn} \end{pmatrix} S^{\mathrm{T}},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = S^{-1} b b^{\mathrm{T}} (S^{-1})^{\mathrm{T}}, \quad \beta_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{ij}}{1 - \lambda_i \lambda_j}, & \lambda_i \lambda_j \neq 1, \\ 0, & \lambda_i \lambda_j = 1. \end{cases}$$

Тогда

1) *в случае $b \in \mathbb{L}_{<1}$ верно представление*

$$\overline{\mathcal{Y}}_{2,\infty} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x^{\mathrm{T}} H_{\mathcal{Y},\infty} x \leqslant 1\},$$

где $H_{\mathcal{Y},\infty} = H^{-1}$;

2) *в случае $b \in \mathbb{L}_{>1}$ и $\det A \neq 0$ верно представление*

$$\overline{\mathcal{X}}_{2,\infty} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon x^{\mathrm{T}} H_{\mathcal{X},\infty} x \leqslant 1\right\},$$

где $H_{\mathcal{X},\infty}^{-1} = -H^{-1}$.

4. Предельные множества достижимости и 0-управляемости как неподвижная точка

Приведем свойства принципа сжимающих отображений и неподвижных точек, полезные для представления множеств (3) и (5). Известно, что множества (2) и (4) являются выпуклыми компактами и допускают представление в виде образа $\mathcal{E}_p(\infty)$ при линейном преобразовании [19, лемма 9]:

$$\mathcal{Y}_p(N) = Y_N\mathcal{E}_p(\infty),\ Y_N = (b, Ab, \ldots, A^{N-1}b, 0, \ldots) \in l_q^n, \tag{11}$$

$$\mathcal{X}_p(N) = X_N\mathcal{E}_p(\infty),\ X_N = (A^{-1}b, A^{-2}b, \ldots, A^{-N}b, 0, \ldots) \in l_q^n,\ \det A \neq 0. \tag{12}$$

Представим операторы X_∞ и Y_∞ в качестве неподвижных точек сжимающего отображения. Для этого введем два линейных и ограниченных оператора $\mathbf{MULT}_A, \mathbf{R}\colon l_q^n \to l_q^n$:

$$\mathbf{MULT}_A B' = (Ab_1, Ab_2, \ldots),\ A \in \mathbb{R}^{n\times n},$$
$$\mathbf{R}B' = (0, b_1, b_2, \ldots).$$

Для произвольных $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ определим отображение $\mathbf{F}_{A,b}\colon l_q^n \to l_q^n$ следующим образом:

$$\mathbf{F}_{A,b}(B') = \mathbf{R} \circ \mathbf{MULT}_A B' + (b, 0, 0, \ldots) = (b, Ab_1, Ab_2, \ldots). \tag{13}$$

Для произвольного $M \in \mathbb{N}$ через $\mathbf{F}^{(M)}_{A,b}\colon l_q^n \to l_q^n$ обозначим M-кратную композицию отображения $\mathbf{F}_{A,b}$:

$$\mathbf{F}^{(M)}_{A,b}(B') = (\underbrace{\mathbf{F}_{A,b} \circ \ldots \circ \mathbf{F}_{A,b}}_{M})(B').$$

Лемма 4. *Пусть $Y_\infty \in l_q^n$. Тогда Y_∞ – неподвижная точка отображения $\mathbf{F}_{A,b}$.*

Лемма 5. *Пусть $\det A \neq 0$, $X_\infty \in l_q^n$. Тогда X_∞ – неподвижная точка отображения $\mathbf{F}_{A^{-1},A^{-1}b}$.*

Лемма 6. *Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ по модулю строго меньше 1. Тогда для любого $b \in \mathbb{R}^n$*

1) существует $M \in \mathbb{N}$ такое, что $A^M\colon \mathbb{R}^n_r \to \mathbb{R}^n_r$ – сжимающее отображение с коэффициентом сжатия $\alpha_r \in [0; 1)$;

2) $\mathbf{F}^{(M)}_{A,b}$ – сжимающее отображение с коэффициентом сжатия α_r.

Следствие 2. *Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ по модулю строго меньше 1. Тогда Y_∞ – единственная неподвижная точка отображения $\mathbf{F}_{A,b}$. Если $M \in \mathbb{N}$ – такое число, что $A^M\colon \mathbb{R}^n_r \to \mathbb{R}^n_r$ – сжимающее отображением с коэффициентом сжатия $\alpha_r \in [0; 1)$, то*

$$\|Y_\infty - Y_{NM}\|_{l_q^n} \leqslant \frac{\alpha_r^N}{1-\alpha_r}\|Y_M\|_{l_q^n}.$$

Следствие 3. Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ по модулю строго больше 1. Тогда X_∞ – единственная неподвижная точка отображения $\mathbf{F}_{A^{-1},A^{-1}b}$. Если $M \in \mathbb{N}$ – такое число, что $A^{-M} : \mathbb{R}^n_r \to \mathbb{R}^n_r$ – сжимающее отображением с коэффициентом сжатия $\beta_r \in [0;1)$, то

$$\|X_\infty - X_{NM}\|_{l^n_q} \leqslant \frac{\beta_r^N}{1-\beta_r}\|X_M\|_{l^n_q}.$$

Оценки операторов Y_∞ и X_∞, полученные на основе метода простой итерации в следствиях 2 и 3, можно также распространить на множества (3) и (5).

Лемма 7. Пусть $B', C' \in l^n_q$. Тогда

$$\rho_H(B'\mathcal{E}_p(\infty), C'\mathcal{E}_p(\infty)) \leqslant \|B' - C'\|_{l^n_q}.$$

Теорема 1. Пусть все собственные значения $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ по модулю строго меньше 1, $M \in \mathbb{N}$ такое, что отображение $A^M : \mathbb{R}^n_r \to \mathbb{R}^n_r$ является сжимающим с коэффициентом сжатия $\alpha_r \in [0;1)$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\rho_H\left(\overline{\mathcal{Y}}_{p,\infty}, \mathcal{Y}_p(NM)\right) \leqslant \frac{\alpha_r^N}{1-\alpha_r}\|Y_M\|_{l^n_q}.$$

Теорема 2. Пусть все собственные значения $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ по модулю строго больше 1, $M \in \mathbb{N}$ такое, что отображение $A^{-M} : \mathbb{R}^n_r \to \mathbb{R}^n_r$ является сжимающим с коэффициентом сжатия $\beta_r \in [0;1)$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\rho_H\left(\overline{\mathcal{X}}_{p,\infty}, \mathcal{X}_p(NM)\right) \leqslant \frac{\beta_r^N}{1-\beta_r}\|X_M\|_{l^n_q}.$$

Следствие 2 и теорема 1 базируются на том, что построенный оператор $\mathbf{F}^{(M)}_{A,b}$ оказывается сжимающими, если аналогичным свойством обладает матрица A^M, а также он наследует коэффициент сжатия данной матрицы. Добиться того, чтобы для некоторого $M \in \mathbb{N}$ отображение A^M оказалось сжатием, возможно в том и только в том, случае, если все собственные значения A по модулю строго меньше 1. Следует отметить, что данное условие является только достаточным условием ограниченности предельного множества достижимости $\mathcal{Y}_{p,\infty}$, но не необходимым. Необходимое и достаточное условие ограниченности представляет собой включение $b \in \mathbb{L}_{<1}$ [19]. Даже если матрица A обладает собственными значениями, большими либо равными по модулю 1, при выполнении условия $b \in \mathbb{L}_{<1}$ множество $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ будет ограниченным, однако непосредственно использовать аппарат сжимающих отображений для его построения окажется невозможным в силу отсутствия коэффициента сжатия у матрицы A^M при любом $M \in \mathbb{N}$.

Тем не менее при $b \in \mathbb{L}_{<1}$ можно сузить фазовое пространство системы (1) до инвариантного подпространства $\mathbb{L}_{<1}$, на котором отображение A будет обладать только собственными значениями, строго меньшими 1 по модулю. Это позволит воспользоваться следствием 2 и теоремой 1 для построения множества $\mathcal{Y}_{p,\infty}$. Аналогичные рассуждения справедливы и для множества $\mathcal{X}_{p,\infty}$, следствия 3 и теоремы 2 при замене A на A^{-1}, b на $A^{-1}b$ и $\mathbb{L}_{<1}$ на $\mathbb{L}_{>1}$.

Отдельно следует отметить случай, когда при разложении b по вещественному жорданову базису A компоненты, соответствующие $\mathbb{L}_{=1}$, оказываются отличными от 0, т.е. A обладает собственными значениями, равными по модулю 1. Тогда неограниченными оказываются оба множества $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ и $\mathcal{X}_{p,\infty}$, что не позволяет представить их в виде неподвижных точек сжимающих отображений.

5. Метод построения внешних оценок предельных множеств

Рассмотрим вопросы конструирования внешних оценок множеств $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ и $\mathcal{X}_{p,\infty}$. В [19] предложены методы построения множеств $\mathcal{Y}_p(N)$ и $\mathcal{X}_p(N)$ для любого произвольного $N \in \mathbb{N}$ на основе точного описания их опорных функций. При этом теоремы 1 и 2 дают априорную оценку точности при рассмотрении множеств (2) и (4) в качестве внутренней аппроксимации предельных множеств (3) и (5) соответственно. В сочетании со свойствами расстояния Хаусдорфа это позволяет также построить внешнюю аппроксимацию.

Для этого обозначим через $\mathcal{B}^r_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n_r$ шар радиуса R с центров в x_0 в пространстве $\mathbb{R}^n_r$.

Теорема 3. *Пусть все собственные значения $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ по модулю строго меньше 1, $M \in \mathbb{N}$ такое, что отображение $A^M : \mathbb{R}^n_r \to \mathbb{R}^n_r$ является сжимающим с коэффициентом сжатия $\alpha_r \in [0;1)$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ справедливо включение*

$$\mathcal{Y}_{p,\infty} \subset \mathcal{Y}_p(NM) + \mathcal{B}^r_{R_N}(0),$$
$$R_N = \frac{\alpha_r^N}{1-\alpha_r}\|Y_M\|_{l_q^n}.$$

Теорема 4. *Пусть все собственные значения $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ по модулю строго больше 1, $M \in \mathbb{N}$ такое, что отображение $A^{-M} : \mathbb{R}^n_r \to \mathbb{R}^n_r$ является сжимающим с коэффициентом сжатия $\beta_r \in [0;1)$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ справедливо включение*

$$\mathcal{X}_{p,\infty} \subset \mathcal{X}_p(NM) + \mathcal{B}^r_{R_N}(0),$$
$$R_N = \frac{\beta_r^N}{1-\beta_r}\|X_M\|_{l_q^n}.$$

Поскольку величина R_N в предположениях теорем 3 и 4 стремится к 0, они позволяют построить с произвольной степенью точности внешние оценки предельных множеств достижимости $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ и 0-управляемости $\mathcal{X}_{p,\infty}$ системы (1) в предположении, что множества достижимости $\{\mathcal{Y}_p(N)\}_{N=0}^{\infty}$ и 0-управляемости $\{\mathcal{X}_p(N)\}_{N=0}^{\infty}$ за конечное число шагов построены. Для их построения можно воспользоваться результатами, представленными в [19, теорема 1], где для управляемых по Каллману систем для множеств (2) и (4) в явном виде указано описание произвольной опорной гиперплоскости и точки касания в зависимости от выбранного опорного вектора.

Определенную сложность составляет вычисление значений величин M, α_r, β_r, $\|Y_M\|_{l_q^n}$ и $\|X_M\|_{l_q^n}$. В общем случае α_r представляет собой операторную норму $A^M : \mathbb{R}_r^n \to \mathbb{R}_r^n$:

$$\alpha_r = \max_{\|x\|_r \leqslant 1} \|A^M x\|_r. \tag{14}$$

Задача выпуклого программирования (14) может быть решена числено для выбранного значения параметра $r \in [1;\infty]$. При этом для значений $r \in \in \{1, 2, \infty\}$ известны аналитические представления [25]:

$$\alpha_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \alpha_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}, \quad \alpha_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

где через a_{ij} обозначены компоненты матрицы A^M. Значение β_r определяется аналогичным образом при замене матрицы A на A^{-1}.

Величина M может быть определена через последовательное вычисление α_r или β_r, пока не будет выполнено условие $\alpha_r \in [0;1)$ при построении $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ или $\beta_r \in [0;1)$ при построении $\mathcal{X}_{p,\infty}$. Априорные оценки M неизвестны, хотя для случая, когда A обладает n линейно независимыми собственными векторами, $M = 1$.

Методы вычисления $\|Y_M\|_{l_q^n}$ и $\|X_M\|_{l_q^n}$ представим в виде следующей теоремы.

Теорема 5. *Пусть для некоторого $M \in \mathbb{N}$ верно представление*

$$B' = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1M} & 0 & \ldots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ b_{n1} & \ldots & b_{nM} & 0 & \ldots \end{pmatrix} \in l_q^n.$$

Тогда справедливы следующие оценки:

1) *для всех $r \in [1;\infty)$ и $p > 1$ вычисление $\|B'\|_{l_q^n}$ сводится к решению задачи выпуклого программирования:*

$$\left(\|B'\|_{l_q^n}\right)^r = \max_{\sum\limits_{k=1}^{M} |u_k|^p = 1} \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{k=1}^{M} b_{ik} u_k\right|^r;$$

2) *для всех* $r \in [1;\infty)$ *и* $p > 1$

$$\|B'\|_{l_q^n} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{M} |b_{ik}|^q \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{1}{r}};$$

3) *если* $M = 1$, *то*

$$\|B'\|_{l_q^n} = \left(\sum_{i=1}^{n} |b_{i1}|^r \right)^{\frac{1}{r}};$$

4) *если* $r = p = 2$, *то*

$$\|B'\|_{l_q^n} = \sqrt{\max_{\lambda \in \sigma(B^{\mathrm{T}}B)} |\lambda|},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nM} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times M},$$

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \lambda \text{ – собственное значение } A\};$$

5) *если* $r = \infty$, *то*

$$\|B'\|_{l_q^n} = \max_{i=\overline{1,n}} \left(\sum_{k=1}^{M} |b_{ik}|^q \right)^{\frac{1}{q}};$$

если $r = 1$, *то*

$$\|B'\|_{l_q^n} = \max_{\substack{\gamma_i \in \{-1;1\} \\ i=\overline{1,n}}} \left(\sum_{k=1}^{M} \left| \sum_{i=1}^{n} \gamma_i b_{ik} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема 5 позволяет использовать внешние оценки, полученные в теоремах 3 и 4, при любом значении параметра r. Однако с точки зрения удобства наиболее подходящими являются значения $r = 1$ и $r = \infty$, так как в данных случаях известны аналитические выражения для α_r, β_r и $\|Y_M\|_{l_q^n}$, $\|X_M\|_{l_q^n}$, а шар $\mathcal{B}_R^r(0)$ является многогранником:

$$\mathcal{B}_R^1(0) = \mathrm{conv} \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{B}_R^\infty(0) = \mathrm{conv} \left\{ \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} : \gamma_i \in \{-1;1\}, i = \overline{1,n} \right\}.$$

6. Примеры

Продемонстрирующие результаты теорем 3–5 на примерах.

Пример 1. Пусть для $p = \frac{4}{3}$ система (1) имеет следующие матрицы:

$$A = 0{,}9 \begin{pmatrix} \cos(2) & \sin(2) \\ -\sin(2) & \cos(2) \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Рассмотрим два значения $r \in \{1, \infty\}$. Положим $M = 4$. Тогда соответствующие операторные нормы A^M, определяемые соотношениями (14), примут значения

$$\alpha_1 = \alpha_\infty = 0{,}4648.$$

С учетом пп. 5 и 6 теоремы 5 справедливы равенства

$$\|Y_M\|_{l_4^n} = \begin{cases} 4{,}0976, & r = 1, \\ 2{,}4962, & r = \infty. \end{cases}$$

Вычислим согласно теореме 3 значение R_N для различных $N \in \{1, 2, 3, 4\}$. В случае $r = 1$ получим следующие результаты:

$$R_1 = 3{,}5592, \ R_2 = 1{,}6545, \ R_3 = 0{,}7691, \ R_4 = 0{,}3575.$$

В случае $r = \infty$ получим следующие результаты:

$$R_1 = 2{,}1681, \ R_2 = 1{,}0078, \ R_3 = 0{,}4685, \ R_4 = 0{,}2178.$$

Тогда можно построить оценки множества $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3},\infty}$ согласно теореме 3. Результаты представлены на рис. 1 и 2. Множества $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}(4)$, $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}(8)$, $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}(12)$, $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}(16)$ построены на основе метода, представленного в [19]. Пунктирными линиями обозначены внешние оценки множества $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3},\infty}$ для различных $N \in \{1, 2, 3, 4\}$ при $r = 1$ на рис. 1 и при $r = \infty$ на рис. 2.

Пример 2. Пусть для $p = 4$ система (1) имеет следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Рассмотрим два значения $r \in \{1, \infty\}$. Положим $M = 4$. Тогда соответствующие операторные нормы A^M, определяемые соотношениями (14), примут значения

$$\alpha_1 = 0{,}5791, \ \alpha_\infty = 0{,}7486.$$

С учетом пп. 5 и 6 теоремы 5 справедливы равенства

$$\|Y_M\|_{l_4^n} = \begin{cases} 6{,}8891, & r = 1, \\ 3{,}6717, & r = \infty. \end{cases}$$

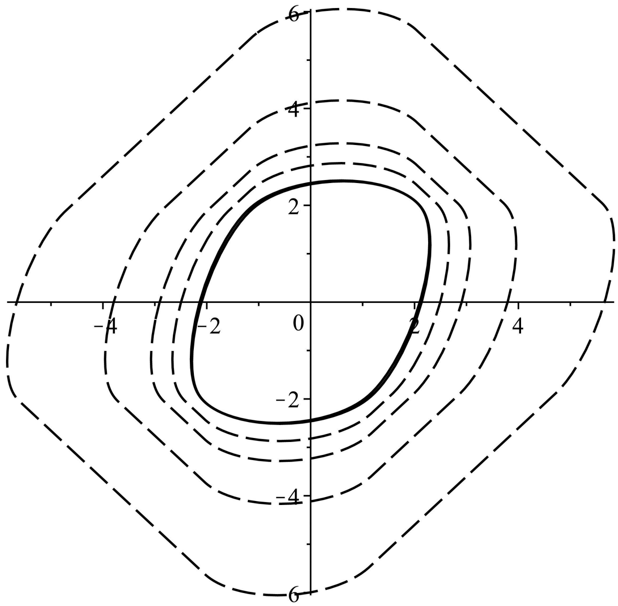

Рис. 1. Множества достижимости $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}(4)$, $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}(8)$, $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}(12)$, $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}(16)$ (сплошные линии) и оценки $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3},\infty}$ (пунктирные линии), полученные на основе теоремы 3 для $r = 1$ и матриц системы (15).

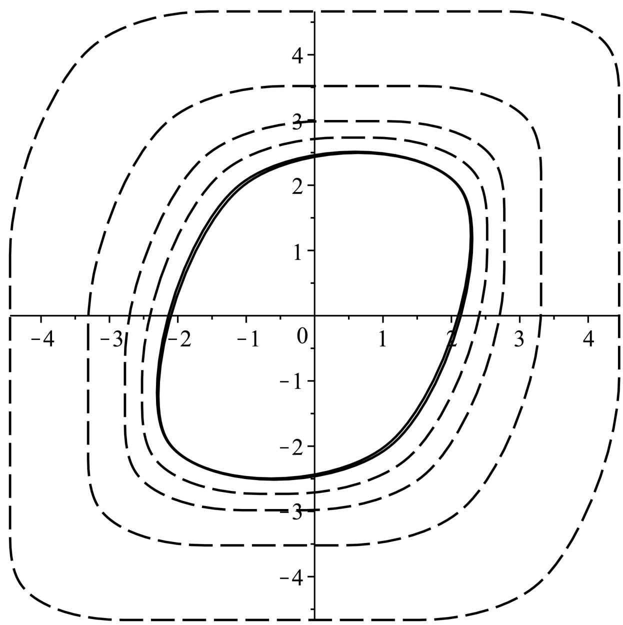

Рис. 2. Множества достижимости $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}(4)$, $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}(8)$, $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}(12)$, $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}(16)$ (сплошные линии) и оценки $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3},\infty}$ (пунктирные линии), полученные на основе теоремы 3 для $r = \infty$ и матриц системы (15).

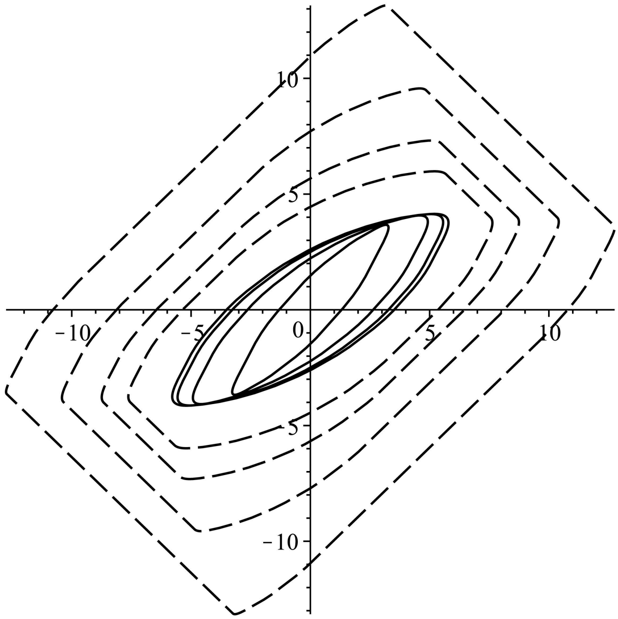

Рис. 3. Множества достижимости $\mathcal{Y}_4(4)$, $\mathcal{Y}_4(8)$, $\mathcal{Y}_4(12)$, $\mathcal{Y}_4(16)$ (сплошные линии) и оценки $\mathcal{Y}_{4,\infty}$ (пунктирные линии), полученные на основе теоремы 3 для $r = 1$ и матриц системы (16).

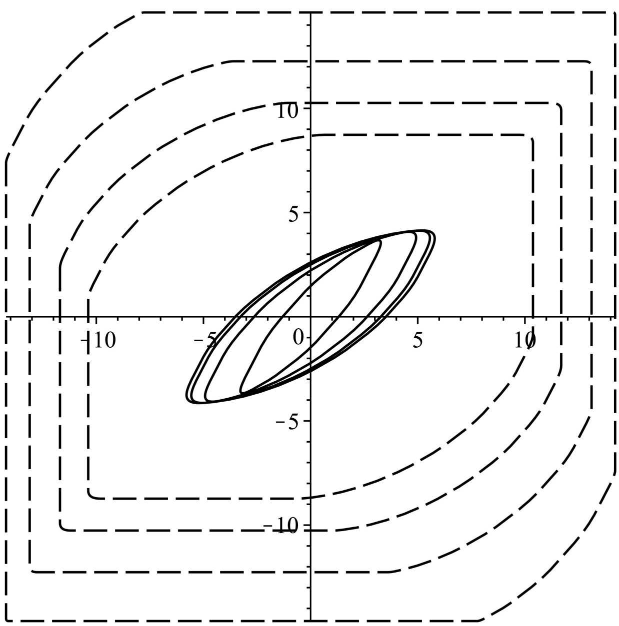

Рис. 4. Множества достижимости $\mathcal{Y}_4(4)$, $\mathcal{Y}_4(8)$, $\mathcal{Y}_4(12)$, $\mathcal{Y}_4(16)$ (сплошные линии) и оценки $\mathcal{Y}_{4,\infty}$ (пунктирные линии), полученные на основе теоремы 3 для $r = \infty$ и матриц системы (16).

Вычислим согласно теореме 3 значение R_N для различных $N \in \{1, 2, 3, 4\}$. В случае $r = 1$ получим следующие результаты:

$$R_1 = 9{,}4784,\ R_2 = 5{,}4890,\ R_3 = 3{,}1887,\ R_4 = 1{,}8408.$$

В случае $r = \infty$ получим следующие результаты:

$$R_1 = 10{,}9333,\ R_2 = 8{,}1847,\ R_3 = 6{,}1271,\ R_4 = 4{,}5867.$$

Тогда можно построить оценки множества $\mathcal{Y}_{4,\infty}$ согласно теореме 3. Результаты представлены на рис. 3 и 4. Множества $\mathcal{Y}_4(4)$, $\mathcal{Y}_4(8)$, $\mathcal{Y}_4(12)$, $\mathcal{Y}_4(16)$ построены на основе метода, представленного в [19]. Пунктирными линиями обозначены внешние оценки множества $\mathcal{Y}_{4,\infty}$ для различных $N \in \{1, 2, 3, 4\}$ при $r = 1$ на рис. 3 и при $r = \infty$ на рис. 4.

В примере 1 точность аппроксимации оказалась выше для $r = \infty$, в то время как в примере 2 более качественные результаты получаются при $r = 1$. В общем случае допустимо вычислить оценки для различных значений параметра $r \in [1; \infty]$, а итоговую оценку рассматривать в виде их пересечения.

Пример 3. Рассмотрим отдельно случай $p = 2$, для которого предельные множества достижимости можно построить явно на основе леммы 3. Отметим, что с точки зрения леммы 3 не существенно, являются собственные значения матрицы A действительными или комплексными. В промежуточных вычислениях при построении матрицы $H_{\mathcal{Y},\infty}$ могут использоваться комплексные числа, но результирующая матрица квадратичной формы, которая определяет структуру $\mathcal{Y}_{2,\infty}$, в любом случае окажется действительной.

Для случая (15) верно, что

$$\lambda_1 = -0{,}3329 + 0{,}7274\mathbf{i},\ \lambda_2 = -0{,}3329 - 0{,}7274\mathbf{i},\ S = \begin{pmatrix} 0{,}7071 & 0{,}7071 \\ 0{,}7071\mathbf{i} & -0{,}7071\mathbf{i} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\mathbf{i} & 4 \\ 4 & 4\mathbf{i} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}8625 - 2.5257\mathbf{i} & 11{,}1111 \\ 11{,}1111 & -0{,}8625 + 2.5257\mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

Отсюда окончательно получим

$$H_{\mathcal{Y},\infty} = \begin{pmatrix} 0{,}1029 & -0{,}0217 \\ -0{,}0217 & 0{,}0881 \end{pmatrix}.$$

Результаты представлены на рис. 5. Множества $\mathcal{Y}_2(2)$, $\mathcal{Y}_2(3)$, $\mathcal{Y}_2(4)$, $\mathcal{Y}_2(5)$ построены на основе метода из [19].

Аналогично для случая (16) верно, что

$$\lambda_1 = -0{,}8,\ \lambda_2 = -0{,}7,\ S = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}8944 \\ 0 & 0{,}4472 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 22{,}3607 \\ 22{,}3607 & 20 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69{,}4444 & 50{,}8197 \\ 50{,}8197 & 39{,}5197 \end{pmatrix}.$$

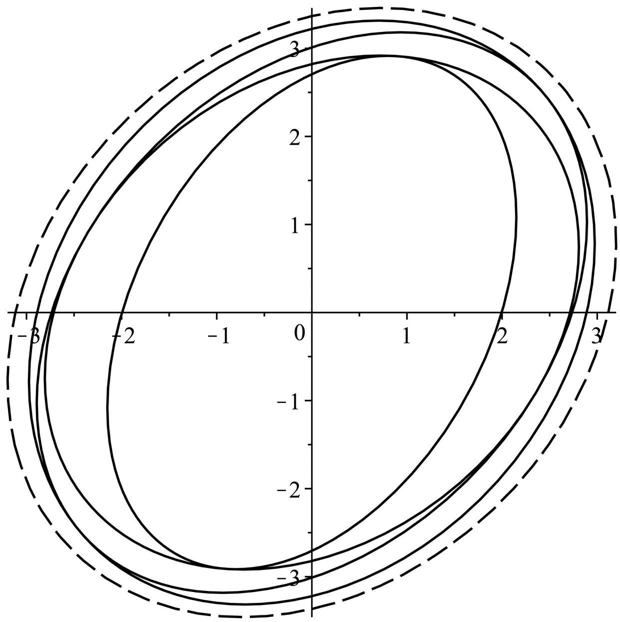

Рис. 5. Множества достижимости $\mathcal{Y}_2(2)$, $\mathcal{Y}_2(3)$, $\mathcal{Y}_2(4)$, $\mathcal{Y}_2(5)$ (сплошные линии) и $\mathcal{Y}_{2,\infty}$ (пунктирная линия), полученные на основе леммы 3 и матриц системы (15).

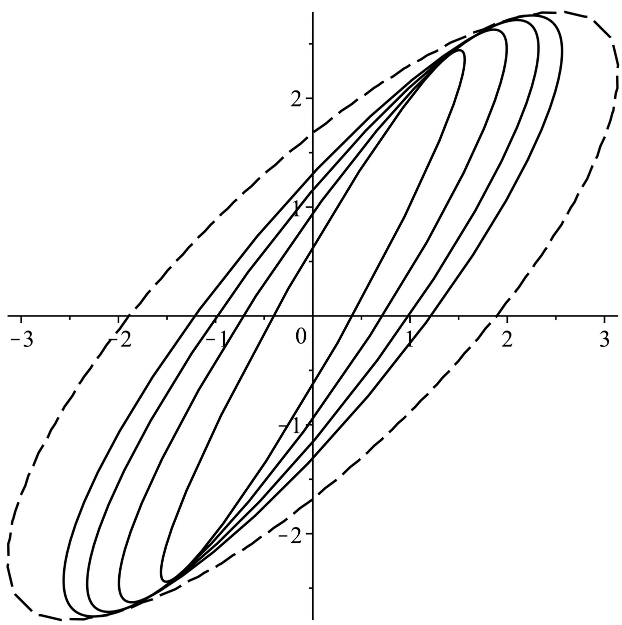

Рис. 6. Множества достижимости $\mathcal{Y}_2(2)$, $\mathcal{Y}_2(3)$, $\mathcal{Y}_2(4)$, $\mathcal{Y}_2(5)$ (сплошные линии) и $\mathcal{Y}_{2,\infty}$ (пунктирная линия), полученные на основе леммы 3 и матриц системы (16).

Отсюда окончательно получим

$$H_{\mathcal{Y},\infty} = \begin{pmatrix} 0{,}2788 & -0{,}2503 \\ -0{,}2503 & 0{,}3522 \end{pmatrix}.$$

Результаты представлены на рис. 6. Множества $\mathcal{Y}_2(2)$, $\mathcal{Y}_2(3)$, $\mathcal{Y}_2(4)$, $\mathcal{Y}_2(5)$ построены на основе метода из [19].

Пример 4. С учетом соотношений (12) и (11) результаты примера 1 и рис. 1 и 2 соответствуют аналогичным построениям для множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}_{\frac{4}{3}}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ и $\mathcal{X}_{\frac{4}{3},\infty}$ при замене A на A^{-1} и b на $A^{-1}b$:

$$A = \frac{10}{9}\begin{pmatrix} \cos(2) & -\sin(2) \\ \sin(2) & \cos(2) \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} \dfrac{10}{9}(\cos(2) - \sin(2)) \\ \dfrac{10}{9}(\cos(2) + \sin(2)) \end{pmatrix}.$$

Также результаты примера 2 и рис. 3 и 4 соответствуют аналогичным построениям для множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}_4(N)\}_{N=0}^{\infty}$ и $\mathcal{X}_{4,\infty}$ при замене A на A^{-1} и b на $A^{-1}b$:

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{4} & -\dfrac{5}{14} \\ 0 & \dfrac{10}{7} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \dfrac{15}{28} \\ \dfrac{20}{7} \end{pmatrix}.$$

7. Заключение

В статье рассмотрена задача построения предельных множеств достижимости и 0-управляемости для стационарных линейных дискретных систем с суммарным ограничением на скалярное управление. Продемонстрировано, что в общем случае вычисление функционала Минковского для данных множеств сводится к операции проектирования шара из нормированного пространства l_p на конечномерное фазовое пространство и к решению систем нелинейных уравнений. Для случая квадратичных ограничений и диагонализируемой матрицы системы составленные уравнения удается решить аналитически, что позволяет описать функционал Минковского в явном виде. В общем случае предельные множества достижимости и 0-управляемости удается представить в виде неподвижных точек сжимающего отображения в метрическом пространстве компактов, коэффициент сжатия которого возможно вычислить численно. Данный факт позволяет оценить погрешность метода простой итерации при построении исследуемых множеств, что в сочетании со свойствами метрики Хаусдорфа приводит к возможности построить их внешние оценки произвольного порядка точности. В частном случае при выборе в качестве нормы в фазовом пространстве нормы Минковского или Чебышева результирующие оценки обладают полиэдральной структурой.

В дальнейшем предполагается обобщить полученные результаты на системы с векторным управлением. В частности, для этого требуется разработать модель учета суммарных ограничений, например, посредством использования функционала Минковского относительно некоторого «ценового» множества. Другой проблемой является построение рекуррентного описания для множеств достижимости и 0-управляемости, которое позволило бы искать их предельные аналоги в виде неподвижных точек подобно результатам, полученным для случая раздельных ограничений на управление в каждый момент времени [15].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. По определению функционала Минковского для любого $x \in \mathbb{L}_2$ верны соотношения

$$\mu(x, B\mathcal{U}) = \inf\{t > 0\colon x \in tB\mathcal{U}\} = \inf\{t > 0\colon \exists u \in t\mathcal{U},\ x = Bu\} =$$
$$= \inf\{t > 0\colon \exists u \in B^{-1}(\{x\}),\ u \in t\mathcal{U}\} = \inf_{u \in B^{-1}(\{x\})} \inf\{t > 0\colon u \in t\mathcal{U}\} =$$
$$= \inf_{u \in B^{-1}(\{x\})} \mu(u, \mathcal{U}).$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Поскольку в силу теоремы Рисса оператор B линеен и ограничен, то согласно лемме 1

$$(\mu(x, B\mathcal{E}_p(\infty)))^p = \left(\inf_{u \in B^{-1}(\{x\})} \mu(u, \mathcal{E}_p(\infty))\right)^p = \inf_{\substack{Bu = x \\ u \in l_p}} \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p. \tag{П.1}$$

Для решения оптимизационной задачи (П.1) воспользуемся методом множителей Лагранжа для бесконечномерных пространств [29]. Функция Лагранжа для $\lambda \in \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$L(u, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p + \lambda^{\mathrm{T}}(x - Bu).$$

Тогда поиск минимума в задаче (П.1) сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial u_k} = 0,\ k \in \mathbb{N}, \\ Bu = x, \end{cases} \quad \begin{cases} pI_p(u) - B^*\lambda = 0, \\ Bu = x, \end{cases}$$
$$\begin{cases} u = I_p^{-1}\left(\dfrac{1}{p} B^*\lambda\right) = I_q\left(\dfrac{1}{p} B^*\lambda\right), \\ Bu = x. \end{cases}$$

Отсюда с учетом (П.1) и тождества $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|^p = (u, I_p(u))$ следует, что

$$(\mu(x, B\mathcal{E}_p(\infty)))^p = \left(I_q \left(\frac{1}{p} B^* \lambda \right), I_p \left(I_q \left(\frac{1}{p} B^* \lambda \right) \right) \right) =$$
$$= \left(I_q \left(\frac{1}{p} B^* \lambda \right), \frac{1}{p} B^* \lambda \right) = \left\| \frac{1}{p} B^* \lambda \right\|_{l_q}^q,$$
$$B I_q \left(\frac{1}{p} B^* \lambda \right) = x.$$

Переобозначив $\frac{1}{p}\lambda$ на λ, окончательно получим

$$\mu(x, B\mathcal{E}_p(\infty)) = \|B^*\lambda\|_{l_q}^{\frac{q}{p}} = \|B^*\lambda\|_{l_q}^{q-1},$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^n$ определяется из (10).

Лемма 2 доказана.

Доказательство следствия 1. По определению оператор I_2 является тождественным. Тогда условие (10) примет вид

$$BB^*\lambda = x.$$

Поскольку B сюръективен, то оператор $BB^*\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и порождающая его матрица обратимы, что приводит к соотношению

$$\lambda = (BB^*)^{-1} x.$$

С учетом леммы 2 получим

$$\mu(x, B\mathcal{E}_2(\infty)) = \|B^*(BB^*)^{-1}x\|_2 = \sqrt{(B^*(BB^*)^{-1}x, B^*(BB^*)^{-1}x)} =$$
$$= \sqrt{x^{\mathrm{T}}(BB^*)^{-1}x}.$$

Следствие 1 доказано.

Доказательство леммы 3. Положим $B = Y_\infty$. Тогда с учетом спектрального разложения матрицы $A = S\Lambda S^{-1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$ верны равенства

$$b_k b_k^{\mathrm{T}} = A^{k-1} b b^{\mathrm{T}} (A^{k-1})^{\mathrm{T}} = S \Lambda^{k-1} S^{-1} b b^{\mathrm{T}} (S^{-1})^{\mathrm{T}} \Lambda^{k-1} S^{\mathrm{T}} =$$
$$= S \operatorname{diag}(\lambda_1^{k-1}, \ldots, \lambda_n^{k-1}) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \operatorname{diag}(\lambda_1^{k-1}, \ldots, \lambda_n^{k-1}) S^{\mathrm{T}} =$$
$$= S \begin{pmatrix} (\lambda_1\lambda_1)^{k-1}\alpha_{11} & \ldots & (\lambda_1\lambda_n)^{k-1}\alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda_n\lambda_1)^{k-1}\alpha_{n1} & \ldots & (\lambda_n\lambda_n)^{k-1}\alpha_{nn} \end{pmatrix} S^{\mathrm{T}}.$$

В силу включения $b \in \mathbb{L}_{<1}$ коэффициенты α_{ij} равны нулю для всех $i, j = \overline{1, n}$ таких, что хотя бы одно из двух собственных значений λ_i или λ_j оказывается по модулю больше либо равно 1:

$$\alpha_{ij} = 0, \text{ если } |\lambda_i| \geqslant 1 \text{ или } |\lambda_j| \geqslant 1. \tag{П.2}$$

Отсюда с учетом выражения для суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии следует равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_i \lambda_j)^{k-1} \alpha_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{ij}}{1 - \lambda_i \lambda_j}, & |\lambda_i| < 1 \text{ и } |\lambda_j| < 1, \\ 0, & |\lambda_i| \geqslant 1 \text{ или } |\lambda_j| \geqslant 1, \end{cases}$$

которое в силу (П.2) совпадает с определением β_{ij}.

Тогда верна следующая цепочка равенств:

$$BB^* = \sum_{k=1}^{\infty} b_k b_k^{\mathrm{T}} = S \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda_1 \lambda_1)^{k-1} \alpha_{11} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda_1 \lambda_n)^{k-1} \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda_n \lambda_1)^{k-1} \alpha_{n1} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda_n \lambda_n)^{k-1} \alpha_{nn} \end{pmatrix} S^{\mathrm{T}} =$$

$$= S \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} S^{\mathrm{T}} = H.$$

Отсюда с учетом следствия 1 вытекает равенство $H_{\mathcal{Y},\infty} = H^{-1}$.

Второй пункт леммы 3 доказывается аналогично при переобозначении $B = X_\infty$.

Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Доказательство вытекает непосредственно из (6) и (13).

Доказательство леммы 5. Доказательство вытекает непосредственно из (7) и (13).

Доказательство леммы 6. Так как все собственные значения матрицы A по модулю строго меньше 1, согласно [22, теорема 5.6.12] $\|A^k\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Тогда по определению предела для $\alpha_r \in [0; 1)$ найдется $M \in \mathbb{N}$ такое, что $\|A^M\| = \sup\limits_{\|x\|_r \leqslant 1} \|A^M x\|_r < \alpha_r$. Поскольку справедливо неравенство

$$\|A^M (x - y)\|_r \leqslant \|A^M\| \|x - y\|_r \leqslant \alpha_r \|x - y\|_r,$$

A^M является сжатием с коэффициентом $\alpha_r \in [0; 1)$.

Пусть $B' = (b_1, b_2, \dots) \in l_q^n$, $C' = (c_1, c_2, \dots) \in l_q^n$. Тогда

$$\left\| \mathbf{F}_{A,b}^{(M)}(B') - \mathbf{F}_{A,b}^{(M)}(C') \right\|_{l_q^n} = \left\| (b, Ab, \dots A^{M-1}b, A^M b_1, A^M b_2, \dots) - \right.$$

$$\left. - (b, Ab, \dots A^{M-1}b, A^M c_1, A^M c_2, \dots) \right\|_{l_q^n} =$$

$$= \left\| (0, \dots, 0, A^M(b_1 - c_1), A^M(b_2 - c_2), \dots) \right\|_{l_q^n} =$$

$$= \left\| (A^M(b_1 - c_1), A^M(b_2 - c_2), \dots) \right\|_{l_q^n} =$$

$$= \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \| (A^M(b_1 - c_1), A^M(b_2 - c_2), \dots) u \|_r =$$

$$= \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} A^M(b_k - c_k) u_k \right\|_r = \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \left\| A^M \sum_{k=1}^{\infty} b_k u_k - A^M \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k \right\|_r \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \alpha_r \left\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k u_k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k \right\|_r = \alpha_r \|B' - C'\|_{l_q^n}.$$

Лемма 6 доказана.

Доказательство следствия 2. В силу теоремы 6 отображение $\mathbf{F}_{A,b}^{(M)}$ – сжатие, при этом пространство l_q^n полное. Тогда в силу принципа сжимающих отображения Банаха [25] существует единственная неподвижная точка $\mathbf{F}_{A,b}^{(M)}$. При этом по построению неподвижная точка отображения $\mathbf{F}_{A,b}$ должна являться также неподвижной точкой отображения $\mathbf{F}_{A,b}^{(M)}$. С учетом леммы 4 единственной неподвижной точкой $\mathbf{F}_{A,b}^{(M)}$ является $Y_\infty \in l_q^n$. Откуда следует, что Y_∞ является единственной неподвижной точкой $\mathbf{F}_{A,b}$.

Заметим, что справедливо представление $\mathbf{F}_{A,b}^{(NM)}(O) = Y_{NM}$, где через $O\colon l_p \to \mathbb{R}_r^n$ обозначен нулевой оператор, который отождествляется с нулевой последовательностью $(0, 0, \dots) \in l_q^n$. Тогда согласно теореме 6

$$\|Y_\infty - Y_{NM}\|_{l_q^n} = \left\| \mathbf{F}_{A,b}^{(M)}(Y_\infty) - \mathbf{F}_{A,b}^{(M)} \left(\mathbf{F}_{A,b}^{(NM-M)}(O) \right) \right\|_{l_q^n} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_r \left\| Y_\infty - \mathbf{F}_{A,b}^{(NM-M)}(O) \right\|_{l_q^n} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_r \left\| Y_\infty - \mathbf{F}_{A,b}^{(NM)}(O) \right\|_{l_q^n} + \alpha_r \left\| \mathbf{F}_{A,b}^{(NM)}(O) - \mathbf{F}_{A,b}^{(NM-M)}(O) \right\|_{l_q^n} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_r \left\| Y_\infty - \mathbf{F}_{A,b}^{(NM)}(O) \right\|_{l_q^n} + \alpha_r^N \left\| \mathbf{F}_{A,b}^{(M)}(O) - O \right\|_{l_q^n} =$$

$$= \alpha_r \|Y_\infty - Y_{NM}\|_{l_q^n} + \alpha_r^N \|Y_M\|_{l_q^n},$$

$$\|Y_\infty - Y_{NM}\|_{l_q^n} \leqslant \frac{\alpha_r^N}{1 - \alpha_r} \|Y_M\|_{l_q^n}.$$

Следствие 2 доказано.

Доказательство следствия 3. Доказательство вытекает из следствия 2 при замене A на A^{-1}, b на $A^{-1}b$ в совокупности с леммой 5 и тем фактом, что собственные значения A^{-1} взаимно обратны собственным значениям A [28].

Доказательство леммы 7. Рассмотрим величину

$$\rho_H(B'\mathcal{E}_p(\infty), C'\mathcal{E}_p(\infty)) =$$

$$= \max\left\{ \sup_{x\in B'\mathcal{E}_p(\infty)} \inf_{y\in C'\mathcal{E}_p(\infty)} \|x-y\|_r; \sup_{x\in C'\mathcal{E}_p(\infty)} \inf_{y\in B'\mathcal{E}_p(\infty)} \|x-y\|_r \right\} =$$

$$= \max\left\{ \sup_{u\in \mathcal{E}_p(\infty)} \inf_{v\in \mathcal{E}_p(\infty)} \|B'u-C'v\|_r; \sup_{u\in \mathcal{E}_p(\infty)} \inf_{v\in \mathcal{E}_p(\infty)} \|C'u-B'v\|_r \right\},$$

$$\sup_{u\in \mathcal{E}_p(\infty)} \inf_{v\in \mathcal{E}_p(\infty)} \|C'u-B'v\|_r = \sup_{u\in \mathcal{E}_p(\infty)} \inf_{v\in \mathcal{E}_p(\infty)} \|B'u-C'v\|_r =$$

$$= \sup_{u\in \mathcal{E}_p(\infty)} \inf_{v\in \mathcal{E}_p(\infty)} \|B'u-C'u+C'u-C'v\|_r \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{u\in \mathcal{E}_p(\infty)} \inf_{v\in \mathcal{E}_p(\infty)} (\|B'u-C'u\|_r + \|C'u-C'v\|_r) =$$

$$= \sup_{u\in \mathcal{E}_p(\infty)} \left(\|(B'-C')u\|_r + \inf_{v\in \mathcal{E}_p(\infty)} \|C'(u-v)\|_r \right) =$$

$$= \sup_{u\in \mathcal{E}_p(\infty)} \|(B'-C')u\|_r = \|B'-C'\|_{l_q^n}.$$

Окончательно получим

$$\rho_H(B'\mathcal{E}_p(\infty), C'\mathcal{E}_p(\infty)) \leqslant \|B'-C'\|_{l_q^n}.$$

Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы 1. Доказательство следует непосредственно из следствия 2, представлений (11) и (8) и леммы 7.

Доказательство теоремы 2. Доказательство следует непосредственно из следствия 3, представлений (12) и (9) и леммы 7.

Доказательство теоремы 3. Как известно [27], для любых $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{K}_n$, удовлетворяющих условию $\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \leqslant R$, верно включение

$$\mathcal{X} \subset \mathcal{Y} + \mathcal{B}_R^r(0).$$

Отсюда с учетом теоремы 1 следует теорема 3.

Доказательство теоремы 4. Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 при замене теоремы 1 на теорему 2.

Доказательство теоремы 5. 1). Пункт 1 следует из определения операторной нормы и того факта, что максимум выпуклой функции достигается на границе выпуклого множества [22]:

$$\|B'\|_{l_q^n} = \sup_{u\in\mathcal{E}_p(\infty)} \|B'u\|_r = \sup_{\sum\limits_{k=1}^{\infty}|u_k|^p=1} \left(\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}u_k\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$= \left(\sup_{\sum\limits_{k=1}^{\infty}|u_k|^p=1} \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{M} b_{ik}u_k\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\max_{\sum\limits_{k=1}^{M}|u_k|^p=1} \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{M} b_{ik}u_k\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

2). В силу неравенства Гельдера из п. 1 следует п. 2:

$$\|B'\|_{l_q^n} \leqslant \left(\max_{\sum\limits_{k=1}^{M}|u_k|^p=1} \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{M}|b_{ik}|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{M}|u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^r\right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{M}|b_{ik}|^q\right)^{\frac{r}{q}}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

3). Также при $M=1$ из п. 1 следует п. 3:

$$\|B'\|_{l_q^n} = \left(\max_{|u_1|^p=1}\sum_{i=1}^{n}|b_{i1}u_1|^r\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_{i=1}^{n}|b_{i1}|^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

4). При $r=p=2$ операторную норму можно представить в терминах скалярного произведения в $\mathbb{R}_2^n$:

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Тогда с учетом п. 1 верно представление

$$\left(\|B'\|_{l_q^n}\right)^2 = \max_{\substack{u\in\mathbb{R}^M:\\(u,u)=1}} (Bu,Bu) = \max_{\substack{u\in\mathbb{R}^M:\\(u,u)=1}} (u, B^{\mathrm{T}}Bu).$$

Согласно методу множителей Лагранжа [29] точка максимума рассматриваемой оптимизационной задачи $u^*\in\mathbb{R}^M$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases}\nabla\left((u,B^{\mathrm{T}}Bu)+\lambda(1-(u,u))\right)=0,\\(u,u)=1,\end{cases}\quad \begin{cases}2B^{\mathrm{T}}B-2\lambda u=0,\\(u,u)=1,\end{cases}\quad \begin{cases}(B^{\mathrm{T}}B-\lambda I)u=0,\\(u,u)=1.\end{cases}$$

Тогда по определению u^* является нормированным собственным вектором матрицы $B^{\mathrm{T}}B$, соответствующим собственному значению λ^*, т.е.

$$\left(\|B'\|_{l_q^n}\right)^2 = (u^*, B^{\mathrm{T}}Bu^*) = (u^*, \lambda^* u^*) = \lambda^*.$$

П. 4 полностью доказан.

5). П. 5 следует из представления операторной нормы B' и теоремы Рисса о норме линейного и ограниченного функционала в l_p [25]:

$$\|B'\|_{l_q^n} = \sup_{u\in\mathcal{E}_p(\infty)} \max_{i=\overline{1,n}} \left|\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}u_k\right| =$$

$$= \max_{i=\overline{1,n}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_{ik}|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \max_{i=\overline{1,n}} \left(\sum_{k=1}^{M} |b_{ik}|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

6). Для доказательства п. 6 учтем представление $|\gamma| = \max\{\gamma, -\gamma\}$ для любого $\gamma \in \mathbb{R}$ и рассмотрим цепочку равенств

$$\|B'\|_{l_q^n} = \sup_{u\in\mathcal{E}_p(\infty)} \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}u_k\right| = \sup_{u\in\mathcal{E}_p(\infty)} \sum_{i=1}^{n} \max_{\gamma_i\in\{-1;1\}} \left(\gamma_i \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}u_k\right) =$$

$$= \max_{\substack{\gamma_i\in\{-1;1\}\\ i=\overline{1,n}}} \sup_{u\in\mathcal{E}_p(\infty)} \left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i b_{ik}\right)u_k\right| = \max_{\substack{\gamma_i\in\{-1;1\}\\ i=\overline{1,n}}} \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{n}\gamma_i b_{ik}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \max_{\substack{\gamma_i\in\{-1;1\}\\ i=\overline{1,n}}} \left(\sum_{k=1}^{M}\left|\sum_{i=1}^{n}\gamma_i b_{ik}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема 5 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.
2. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче оптимального быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // АиТ. 2015. № 9. С. 3–30. https://doi.org/10.1134/S0005231019030012

   Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the Problem of Optimal Speed for the Discrete Linear System with Bounded Scalar Control on the Basis of 0-controllability Sets // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 9. P. 1517–1540. https://doi.org/10.1134/S0005117919030019

3. *Ибрагимов Д.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // АиТ. 2019. № 3. С. 3–25. https://doi.org/10.1134/S0005231019030012

   Ibragimov D.N. On the Optimal Speed Problem for the Class of Linear Autonomous Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control and Degenerate Operator // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 3. P. 393–412. https://doi.org/10.1134/S0005117919030019

4. *Зайцева М.В., Точилин П.А.* Методы построения оценок множеств достижимости в задаче моделирования потоков людей // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 8. С. 1381–1394. https://doi.org/10.31857/S0044466923070190

5. *Точилин П.А.* О построении невыпуклых аппроксимаций множеств достижимости кусочно-линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1503–1515. https://doi.org/10.1134/S0374064115110114

   Tochilin P.A. On the construction of nonconvex approximations to reach sets of piecewise linear systems // Differential Equations. 2015. V. 51. No. 11. P. 1499–1511. https://doi.org/10.1134/S0012266115110117

6. *Kuntsevich V.M., Kurzhanski A.B.* Attainability Domains for Linear and Some Classes of Nonlinear Discrete Systems and Their Control // J. Autom. Inform. Sci. 2010. V. 42. No. 1. P. 1–18. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v42.i1.10

7. *Сиротин А.Н., Формальский А.М.* Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях // АиТ. 2003. № 12. С. 17–32.

   Sirotin A.N., Formal'skii A.M. Reachability and Controllability of Discrete-Time Systems under Control Actions Bounded in Magnitude and Norm // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 12. P. 1844–1857. https://doi.org/10.1023/B:AURC.0000008423.93495.be

8. *Colonius F., Cossich J.A.N., Santana A.J.* Controllability properties and invariance pressure for linear discrete-time systems // J. Dynam. Different. Equat. 2022. Vol. 34. P. 5–22. https://doi.org/10.1007/s10884-021-09966-4

9. *Darup M.S., Monnigmann M.* On general relations between null-controllable and controlled invariant sets for linear constrained systems // 53rd IEEE Conference on Decision and Control. Los Angeles. 2014. P. 6323–6328. https://doi.org/10.1109/CDC.2014.7040380

10. *Ge S.S., Zhendong S., Lee T.H.* Reachability and controllability of switched linear discrete-time systems // IEEE Transact. Autom. Control. 2001. Vol. 46. No. 9. P. 1437–1441. https://doi.org/10.1109/9.948473

11. *Heemels W.P.M.H., Camlibel M.K.* Null controllability of discrete-time linear systems with input and state constraints // Proc. 47th IEEE Conf. Decis. Control. 2008. P. 3487–3492. https://doi.org/10.1109/CDC.2008.4739333

12. *Kaba M.D., Camlibel M.K.* A spectral characterization of controllability for linear discrete-time systems with conic constraints // SIAM J. Control Optim. 2015. Vol. 53. No. 4. P. 2350–2372. https://doi.org/10.1137/140960967

13. *Benvenuti L., Farina L.* The geometry of the reachability set for linear discrete-time systems with positive controls // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2006. Vol. 28. No. 2. P. 306–325. https://doi.org/10.1137/040612531

14. *Fucheng L., Mengyuan S., Usman* Optimal preview control for linear discrete-time periodic systems // Mathematical Problems in Engineering. 2019. P. 1–11. https://doi.org/10.1155/2019/8434293

15. *Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н.* О методе построения внешних оценок предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // АиТ. 2023. № 2. С. 3–34. https://doi.org/10.31857/S0005231023020010

    Berendakova A.V., Ibragimov D.N. About the Method for Constructing External Estimates of the Limit 0-Controllability Set for the Linear Discrete-Time System with Bounded Control // Autom. Remote Control. 2023. V. 84. No. 2. P. 97–120. https://doi.org/10.25728/arcRAS.2023.95.43.001

16. *Костоусова Е.К.* О внешнем полиэдральном оценивании множеств достижимости в «расширенном» пространстве для линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9. № 4. С. 54–72.

17. *Gayek J.E., Fisher M.E.* Approximating Reachable Sets for n-dimensional Linear Discrete Systems // IMA J. Math. Control Inform. V. 4. No. 2. 1987. P. 149–160. https://doi.org/10.1093/imamci/4.2.149

18. *Ибрагимов Д.Н., Осокин А.В., Сиротин А.Н., Сыпало К.И.* О свойствах предельных множеств управляемости для класса неустойчивых линейных систем с дискретным временем и l_1-ограничениями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2022. № 4. С. 3–21. https://doi.org/10.31857/S0002338822040102

    Ibragimov D.N., Osokin A.V., Sirotin A.N., Sypalo K.I. On the Properties of the Limit Control Sets for a Class of Unstable Linear Systems with Discrete Time and l_1-Restrictions // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2022. Vol. 61. No. 4. P. 467–484. https://doi.org/10.1134/S1064230722040104

19. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О некоторых свойствах множеств ограниченной управляемости для стационарных линейных дискретных систем с суммарным ограничением на управление // Известия РАН. Теория и системы управления. 2023. № 6. С. 3–32. https://doi.org/10.31857/S0002338823050086

20. *Tobler W.R.* Superquadrics and Angle-Preserving Transformations // IEEE-CGA. 1981. V. 1. No. 1. P. 11–23. https://doi.org/10.1109/MCG.1981.1673799

21. *Tobler W.R.* The Hyperelliptical and Other New Pseudo Cylindrical Equal Area Map Projections // J. Geophys. Research. 1973. V. 78. No. 11. P. 1753–1759. https://doi.org/10.1029/JB078i011p01753

22. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

23. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элменты выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004.

24. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex optimization. Cambridge: Cambridge university press, 2004. https://doi.org/10.1017/CBO9780511804441

25. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.

26. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1966.

27. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. М.: ПОСТМАРКЕТ, 2000.

28. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

29. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 29.10.2023

После доработки 04.04.2024

Принята к публикации 11.04.2024